（様式第６号）

# 論　文　要　旨

2023 年　12 月　13 日

| ※報告番号 | 甲第３５２号 | 氏　名 | 内野 佑基 |
|---|---|---|---|

主論文題名

固有値・特異値分解と行列積に対する高信頼数値計算法の研究

内容の要旨

数値計算は一般に誤差を伴う．誤差の影響は決して無視できるものではなく，問題や演算精度によっては計算結果に深刻な誤差を伴うことがある．特に近年は計算の高速化や電力効率の改善を目的として低精度演算の利用が活発化されているため，誤差の影響を考慮することは非常に重要である．そこで，計算結果の信頼性の把握や高信頼な結果を得るための数値計算法の開発が求められる．本論文では行列積，実対称固有値分解，特異値分解に対する高信頼数値計算法の研究成果を紹介する．

行列積については，3 つの点行列の積に対する区間演算法及び高精度行列乗算スキームを用いた高精度な Level 3 BLAS を紹介する．前者では精度保証付き数値計算の基礎を担う区間演算を扱う．区間演算はある問題に対する真の解の厳密な存在範囲を求める手法であり，数値計算結果の信頼性を把握することができる．ここで扱う 3 つの点行列に対する区間行列積は，行列式，一般化固有値問題，特異値分解，行列平方根，行列逆平方根，Sylvester 方程式等の様々な精度保証付き数値計算法において必要不可欠である．当該研究では，従来の手法よりもタイトな結果を同程度の計算コストで得られる手法を提案した．また応用として，3 つの点行列の積の 1-ノルム及び最大値ノルムの上限を求める手法を提案した．数値実験では，一般化固有値問題に対する精度保証法を用いて従来法と提案手法を比較し，提案手法の性能を評価した．

後者では，高精度な行列乗算スキームとして知られている尾崎スキームを扱う．尾崎スキームは高精度行列積を低精度な無誤差行列積の和に変換する手法であり，高速性，高信頼性，高可搬性，再現性の観点で優れている．尾崎スキームは，近年高速化が盛んに行われている低精度浮動小数点演算や整数演算を使用した実装が可能であり，Tensor Core を用いた更なる加速も可能であるため，注目されている手法である．しかしながら，対称ランク k 演算に対して冗長な計算を行ってしまう点や，低精度行列積の回数が必要以上に多くなってしまう点などの弱みがある．そこで，Level 3 BLAS のルーチンとして提供されている行列乗算に対して尾崎スキームに対する効率的なアプローチを提案した．数値実験では，従来のアプローチと比較して提案手法がどの程度効率的であるかを示した．

（次頁へ続く）

※印欄記入不要

（様式第 6 号）

# 論　文　要　旨

2023 年　12 月　13 日

| ※ 報告番号 | 第　　　号 | 氏　名 | 内野　佑基 |
|---|---|---|---|

内容の要旨（続き）

実対称固有値分解については，近似固有ベクトルの精度を改善する混合精度反復改良法を紹介する．荻田と相島は，近接固有値をもたない実対称行列の固有値分解に対する反復改良法を提案した．この手法は 1 反復当たり主に 4 回の高精度行列積で構成されており，近接固有値が存在しなければ真値への 2 次収束性をもつ．著者はこの手法を混合精度数値計算法へ拡張し，1 反復当たりの高精度行列積を 3 回に削減した．さらに，この手法を基に 1 反復当たり主に 2 回の高精度行列積で構成された混合精度反復改良法を提案した．本手法は従来法よりも低コストでありながら同程度の収束性をもたらす．また，荻田と相島は近接固有値が存在する場合に対する後処理も提案した．著者はこの手法に対する演算コストの削減法も提案した．数値実験では，低精度演算の高速処理が可能な環境において提案手法の高速性を示した．

特異値分解については，近似特異ベクトルの精度を改善する混合精度反復改良法を紹介する．荻田と相島は重複特異値や近接特異値をもたない行列の特異値分解に対する反復改良法を提案した．この手法は 1 反復当たり主に 6 回の高精度行列積で構成されており，重複特異値や近接特異値が存在しなければ真値への 2 次収束性をもつ．著者はこの手法を混合精度数値計算法へ拡張し，1 反復当たりの高精度行列積を 5 回に削減した．さらに，この手法を基に 1 反復当たり主に 4 回または 5 回の高精度行列積で構成された混合精度反復改良法をいくつか提案した．それらの手法は一部を除き従来法と同様の収束性をもつ．数値実験では，低精度演算の高速処理が可能な環境において提案手法の高速性を示した．

※印欄記入不要